|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | | |
| Федеральное государственное бюджетное  образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет» | | |
|  | | |
| Кафедра прикладной математики | | |
| Лабораторная работа №3 | | |
| по дисциплине «Уравнения математической физики» | | |
| **Решение гармонических задач** | | |
|  | | |
|  |  |  |
| Группа ПМ-92 | Артюхов Роман |
| Вариант 9 |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
| Преподаватели | Задорожный А. Г. |
|  | Патрушев и. и. |
| Новосибирск, 2022 | | |

Цель работы

Разработать программу решения гармонической задачи методом конечных элементов. Провести сравнение прямого и итерационного методов решения получаемой в результате конечноэлементной аппроксимации СЛАУ.

Задача (вариант 9)

Уравнение:



В котором правая часть *f* представима в виде:



Остальные коэффициенты не зависят от времени.

Трехмерная задача в декартовых координатах, базисные функции – трилинейные.

Теоретическая часть

Решение может быть представлено в виде:



Где *us* и *uc* – две зависящие только от пространственных координат функции, удовлетворяющие системе уравнений:



Параметры краевых условий являются гармонически изменяющимися по времени функциями:



В этом случае функции us и uc должны удовлетворять краевым условиям



Вариационная постановка и конечноэлементная аппроксимация

Умножим скалярно каждое уравнение системы на пробную функцию v, и применим формулу Грина:



Построим конечноэлементную аппроксимацию на основе вариационной формулировки:







В результате мы получим систему из *2n* уравнений с *2n* неизвестными qjs и qjc

Обозначим





Методы решения СЛАУ

* Локально-оптимальная схема. Предобуславливание: LU-факторизация
* Прямой метод LU
* Стабилизированный метод бисопряженных градиентов. Предобуславливание: LU-факторизация

Тесты и исследования

Тест №1 (Полином первой степени)



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | LOS | LU | BCGSTAB |
| **Относительная погрешность** | 3,966440E-016 | 2,695876E-016 | 1,249471E-015 |
| **Относительная погрешность**  **(синус)** | 3,984818E-016 | 2,791328E-016 | 1,164704E-015 |
| **Относительная погрешность**  **(косинус)** | 3,885799E-016 | 2,235646E-016 | 1,564598E-015 |
| **Число итераций** | 36 | 1 | 11 |

Тест №2 (Полином второй степени)



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | LOS | LU | BCGSTAB |
| **Относительная погрешность** | 4,028644E-016 | 1,577315E-016 | 1,259874E-015 |
| **Относительная погрешность**  **(синус)** | 4,206586E-016 | 1,653044E-016 | 1,334312E-015 |
| **Относительная погрешность**  **(косинус)** | 3,420539E-016 | 1,315940E-016 | 9,951560E-016 |
| **Число итераций** | 35 | 1 | 11 |

Тест №3 (Полином третьей степени)



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | LOS | LU | BCGSTAB |
| **Относительная погрешность** | 3,442556E-016 | 1,391092E-016 | 1,342699E-015 |
| **Относительная погрешность**  **(синус)** | 3,546358E-016 | 1,487814E-016 | 1,467364E-015 |
| **Относительная погрешность**  **(косинус)** | 3,166938E-016 | 1,111718E-016 | 9,608177E-016 |
| **Число итераций** | 34 | 1 | 11 |

Тест №4 (Полином четвертой степени)



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | LOS | LU | BCGSTAB |
| **Относительная погрешность** | 4,235933E-003 | 4,235933E-003 | 4,235933E-003 |
| **Относительная погрешность**  **(синус)** | 4,793957E-003 | 4,793957E-003 | 4,793957E-003 |
| **Относительная погрешность**  **(косинус)** | 2,623572E-003 | 2,623572E-003 | 2,623572E-003 |
| **Число итераций** | 34 | 1 | 11 |

Тест №5 (Не полиноминальная функция)



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | LOS (h) | LU (h) | BCGSTAB (h) | LOS (h/2) | LU (h/2) | BCGSTAB (h/2) |
| **Относительная погрешность** | 1,485376E-006 | 1,485376E-006 | 1,485376E-006 | 4,051492E-007 | 4,051492E-007 | 4,051492E-007 |
| **Относительная погрешность**  **(синус)** | 1,777618E-006 | 1,777618E-006 | 1,777618E-006 | 4,852989E-007 | 4,852989E-007 | 4,852989E-007 |
| **Относительная погрешность**  **(косинус)** | 1,189607E-006 | 1,189607E-006 | 1,189607E-006 | 3,242340E-007 | 3,242340E-007 | 3,242340E-007 |
| **Число итераций** | 7 | 1 | 3 | 68 | 1 | 13 |

Оценка порядка аппроксимации 

Исследование на небольшом количестве узлов (1331 узел)



